# משפט

אם f חסומה ב ורציפה ב אזי היא אינט' על

# משפט

אם f אינט' על ועל אזי היא אינט' על ומתקיים

## הוכחה

יהי , אזי קיימת חלוקה של כך ש וגם חלוקה של כך ש. תהי , אזי T הינה חלוקה של ו ואילו ולכן

*לכן f אינט' על . כדי להוכיח (\*) נסמן . מתקיים:*

# משפט

תהי f פונקציה חסומה על ונניח שf אינטגרבילית על כל הקטעים באשר אזי

## הוכחה

אינדוקציה

# משפט

תהי f מונוטונית ב, אזי היא אינט' שם.

## הוכחה

זה ברור אם f קבועה, לכן נניח ש. נניח שf לא יורדת. יהי . אזי uiזי𝑖𝑙𝑜𝑛> שם.הקטעים ולכן f חסומה ב. נגדיר . אם T הינה חלוקה של המקיימת . . אזי התנודה בקטע שווה ולכן:  
אזי תנאי רימן לאינט מתקיים והוכחנו את המשפט

## דוגמה

נגדיר אזי f חסומה ב ולא יורדת שם, אבל ברור שf אינה רציפה בנקודת

# הגדרה

תהי . נגיד שE בעלת מידה 0 אם לכל קיים כיסוי פתוח של E כך ש

דהיינו, יש קטעים כך ש,

## דוגמה

כל קבוצה בת מנייה, הינה בעלת מידה 0.  
אמנם, יהי , יהי . ניקח , ,

# משפט לבג(Lebesgue)

תנאי הכרחי ומספיק לכך שפונקציה חסומה תהיה אינט' על הוא שקבוצת נקודות אי הרציפות של f תהיה בעלת מידה 0.

# משפט

תהי f פונקציה אינט' על , ותהי פונקציה חסומה על המקיימת לכל פרט למספר סופי של נקודות, אזי אינט' על ו.

## הוכחה

תרגיל

# משפט

תהי f אינט' על ו אזי אינט' אף היא ב ו.

## הוכחה

# משפט

אם f,g אינט' על אזי גם אינט' שם ומתקיים

## הוכחה

סכום רימן עבור יש לו הצורה

# משפט

אם f,g אינט' על אזי גם fg אינט' שם.

## הוכחה

נוכיח שfg מקיימת תנאי רימן לאינט'. ידוע לנו שf,g חסומות. נגיד , עבור ולכן עבור .  
תהי T חלוקה של . נסמן את התנודה של f,g,fg ב.  
צ"ל: לכל קיים כך שאם אזי

לכל תת קטע נסמן ב ו את התנודה של f וg ב. רוצים לקבל חסם ל.  
תהיינה ונתבונן ב

מכאן:  
נבחר ב כך שאם אזי

# משפט

תהי g אינט' על ונניח ש עבור . אזי אינט' אף היא ב

## הוכחה

ברור ש חסומה ב.

יהי , אזי אם נבחר כך שאם אזי ומתקיים

# משפט

תהיינה f,g אינט' על ונניח ש עבור . אזי אינט' על .

## הוכחה

ועל פי ההנחות גם f וגם אינט' על

# סימנים

נגדיר ,

# תרגיל

# משפט

אם f אינט' על ו לכל אזי

## הוכחה

# משפט

אם f אינט' על ו לכל אזי

## הוכחה

ברור לפי המשפט הקודם ש. נניח שלא. אזי . לכן אם קיימת חלוקה T כך ש. מכאן אפשר להסיק ש שכן אחרת .

נניח ש ונסמן . אזי:  
קיבלנו קטע שבו וכך ש קטן כרצוננו.

באופן אינדוקטיבי, נוכל להגדיר סדרה של קטעים כך ש:

1. *עבור*

*ע"פ למת קנטור קיים כך ש ולכן לכל , ז"א אבל – סתירה!*

# משפט

אם f,g אינט' על ו אזי (אפשר להחליף ב>)

## הוכחה

התבונן ב